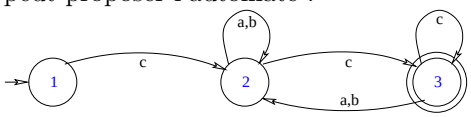
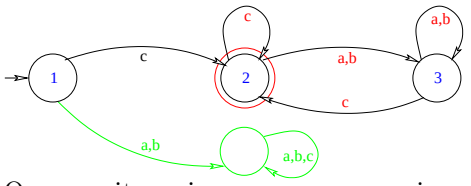
1. *Soit* $\Sigma = \{a, b, c\}$.

(a) *Proposer un automate déterministe (pas nécessairement complet) qui reconnaît le langage sur* Σ^* *de tous les mots qui commencent par* c *et se terminent par* c.

Si on considère que le c qui commence et le c qui termine ne sont pas les mêmes, on peut proposer l'automate :



Mais l'énoncé n'exclut pas que ce soit le même c, et dans ce cas, l'automate doit reconnaître aussi le mot c. Cela donne l'automate (complété ici) :

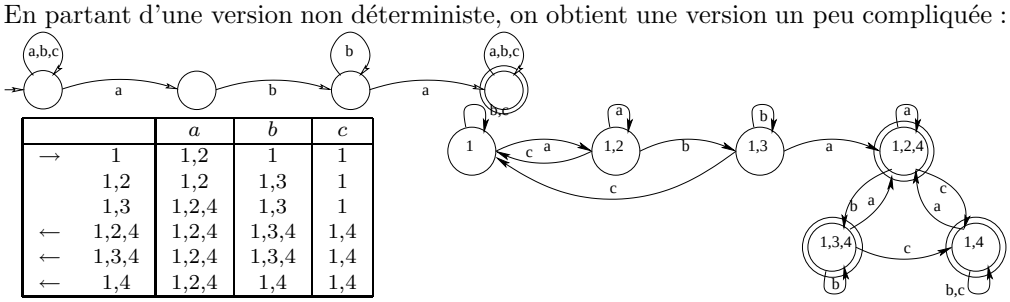


	a	b	c
$\rightarrow 1$	0	0	2
2	2	2	3
$\leftarrow 3$	2	2	3
0	0	0	0

On pouvait aussi passer par une version non déterministe à déterminiser avec la méthode habituelle, cela donne le même résultat.

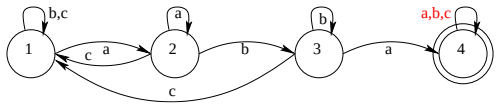
(b) *Proposer un automate déterministe qui reconnaît les mots de* Σ^* *qui comprennent* abb^*a.

En partant d'une version non déterministe, on obtient une version un peu compliquée :



		a	b	c
$\rightarrow$	1	1,2	1	1
	1,2	1,2	1,3	1
	1,3	1,2,4	1,3	1
$\leftarrow$	1,2,4	1,2,4	1,3,4	1,4
$\leftarrow$	1,3,4	1,2,4	1,3,4	1,4
$\leftarrow$	1,4	1,2,4	1,4	1,4

Une version déterministe « à main levée » est plus simple :

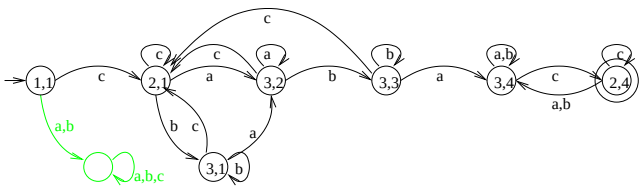


	a	b	c
$\rightarrow 1$	2	1	1
2	2	3	1
3	4	3	1
$\leftarrow 4$	4	4	4

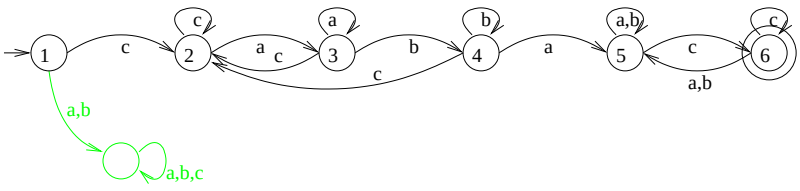
(c) *Proposer un automate (pas nécessairement complet) qui reconnaît les mots de* Σ^* *qui comprennent le motif* abb^*a ***et*** *commencent et se terminent par* c.

Il était important de remarquer que le langage concerné était l'**intersection** des deux langages précédents. En appliquant l'algorithme d'intersection (on simplifie en supprimant les paires d'états dont l'un est un puits) :

	a	b	c
$\rightarrow 1,1$			2,1
2,1	2,2	2,1	3,1
2,2	2,2	2,3	3,1
3,1	2,2,	2,3	3,1
2,3	2,4	2,3	3,1
2,4	2,4	2,4	3,4
$\leftarrow 3,4$	2,4	2,4	3,4



On pouvait aussi proposer une version « à main levée » :

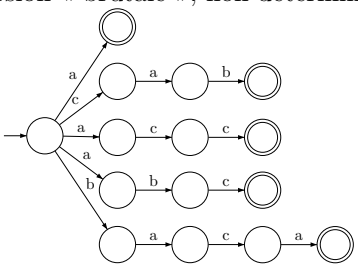


2. *Soit* $L = \{a, bac, cca, abc, baca\}$

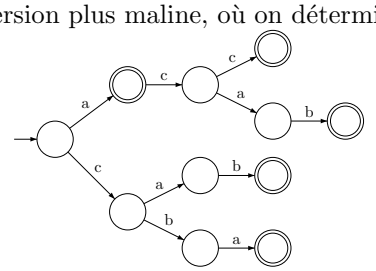
   (a) *Proposer un automate qui reconnaît* $\overline{L}$*, le langage qui contient les mots « renversés » de* L *(*$\{a, cab, acc, cba, acab\}$*).*

   On peut proposer directement un automate :

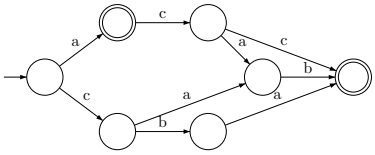
Version « brutale », non déterministe :



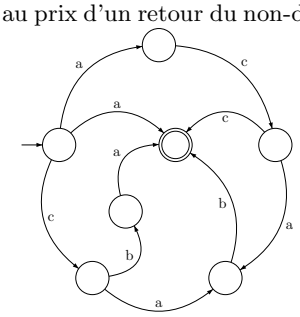
Version plus maline, où on déterminise :



... et si on essaie d'économiser les états, on peut aboutir à :

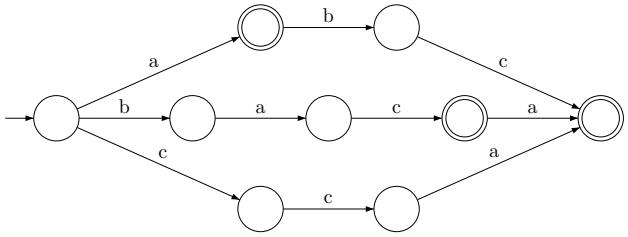


On pouvait aussi n'obtenir qu'un état initial, mais au prix d'un retour du non-déterminisme :

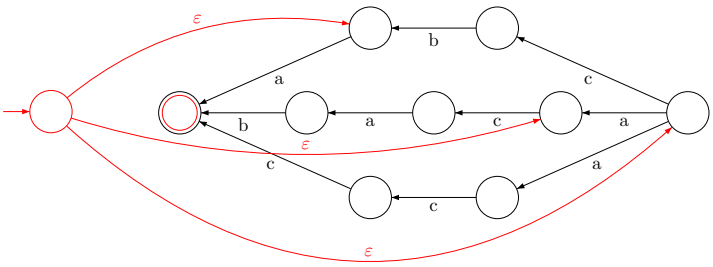


Mais on pouvait aussi, comme le suggérait le reste de l'exercice, partir de l'automate reconnaissant L ($\{a, bac, cca, abc, baca\}$).

Par exemple, soit $\mathcal{A}$, qui reconnaît L :



À partir de $\mathcal{A}$, on peut construire $\mathcal{A}'$:



Cet automate, non déterministe (pas seulement à cause des ε), reconnaît $\overline{L}$.

(b) *Comment démontrer, en général, que si L est rationnel, alors $\overline{L}$ l'est aussi ?*

Si L est rationnel, il existe un automate A qui le reconnaît.
Alors on peut construire un automate $\overline{A}$ qui vérifie les propriétés suivantes :
- $\overline{A}$ a les mêmes états que A, plus un nouvel état initial.
- l'état initial de $\overline{A}$ est relié par une ε-transition à tous les états finaux dans A.
- toutes les transitions de A sont inversées dans $\overline{A}$.
- l'état initial de A devient le seul état final de $\overline{A}$.

Formellement, pour tout automate $\mathcal{A} = \langle Q, X, \delta, q_0, F\rangle$, on peut construire $\overline{\mathcal{A}} = \langle Q \cup \{I\}, X, \overline{\delta}, I, \{q_0\}\rangle$, tel que :
- $\forall q \in F, (I, \varepsilon, q) \in \overline{\delta}$
- $\forall (q, x, q') \in \delta, (q', x, q) \in \overline{\delta}$

Puisque l'on peut toujours construire un tel automate, et puisqu'il reconnaît le langage inversé de l'automate initial, on peut conclure que l'inversé d'un langage L rationnel est rationnel.

(c) *Même question avec le langage $MAX(L) = \{u \in L \mid \forall v \neq \varepsilon, uv \notin L\}$.*

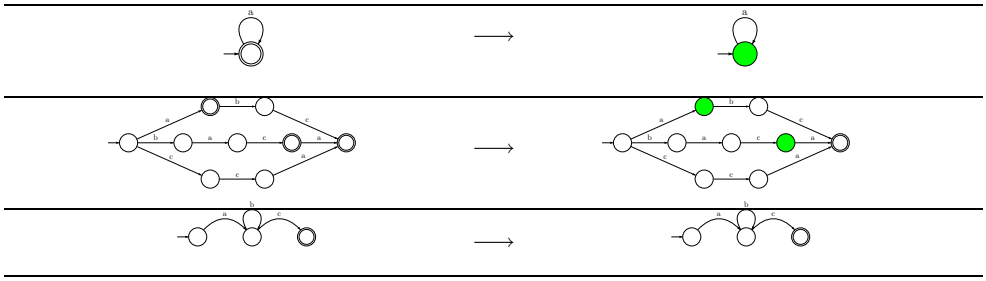
Pour un langage L donné, $MAX(L)$ est le langage qui comprend les mots de L qui ne sont pas les préfixes d'autres mots de L.
Quelques exemples pour fixer les idées :

Si $L =$	$a^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, \ldots\}$	alors $MAX(L) =$	$\emptyset$
Si $L =$	$\{a, bac, cca, abc, baca\}$	alors $MAX(L) =$	$\{cca, abc, baca\}$
Si $L =$	$ab^*c = \{ac, abc, abbc, abbbc, \ldots\}$	alors $MAX(L) =$	L

Pour démontrer que si L est rationnel, alors $MAX(L)$ l'est aussi, il suffit de montrer que l'on peut transformer tout automate qui reconnaît L en un automate qui reconnaît $MAX(L)$.

La transformation pertinente consiste à ne plus considérer comme terminaux les états qui ont des transitions sortantes utiles (*i.e.*, n'allant pas dans un puits).

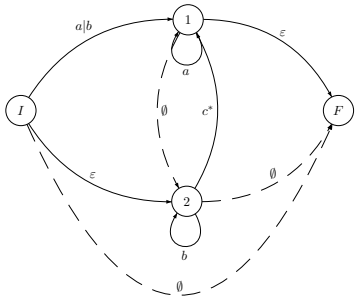
Faute d'une démonstration générale, on peut facilement vérifier que cette transformation donne bien les résultats attendus pour les trois exemples précédents :



On peut donc conclure que pour tout langage L, s'il existe un automate qui le reconnaît, il existe un automate qui reconnaît $MAX(L)$. Donc, si L est rationnel, alors $MAX(L)$ l'est aussi.

3. *Soit l'automate généralisé représenté dans le tableau suivant. Donnez l'expression rationnelle que l'on obtient en supprimant en premier l'état 1, puis l'état 2 ; et donnez celle que l'on obtient en supprimant en premier l'état 2. Qu'en déduisez-vous ?*

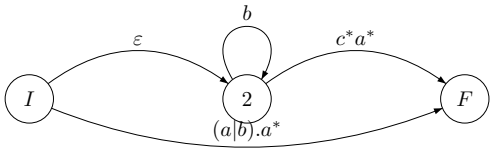
Automate généralisé inital :



↗	1	2	F
I	$a\|b$	ε	$\emptyset$
1	a	$\emptyset$	ε
2	c^*	b	$\emptyset$

Suppression de l'état 1 (puis de l'état 2)

↗	2	F
I	$a\|b.a^*.\emptyset$ $\|\varepsilon$	$a\|b.a^*.\varepsilon$ $\|\emptyset$
2	$c^*.a^*.\emptyset$ $\|b$	$c^*.a^*.\varepsilon$ $\|\emptyset$

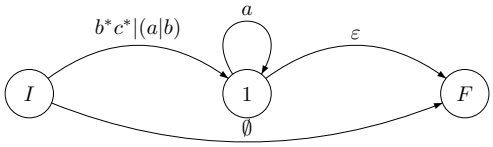


d'où, après suppression de l'état 2, l'expression

$$\varepsilon b^*c^*a^*|(a|b).a^*$$

Suppression de l'état 2 (puis de l'état 1)

↗	1	F
I	$\varepsilon.b^*.c^*$ $\|(a\|b)$	$\varepsilon.b^*.\emptyset$ $\|\emptyset$
1	$\emptyset.b^*.c^*$ $\|a$	$\varepsilon.b^*.\emptyset$ $\|\varepsilon$



d'où, après suppression de l'état 1, l'expression

$$(b^*c|(a|b))\,a^*$$

• Par définition, les expressions obtenues, bien que différentes, sont équivalentes (décrivent le même langage). On pourrait imaginer utiliser cet algorithme pour démontrer des équivalences remarquables.

• Cet algorithme garantit une expression rationnelle, mais pas une expression rationnelle canonique ou minimale.

4. *On s'autorise à écrire une grammaire avec des expressions rationnelles en partie droite. Par exemple,* $S \longrightarrow (AB \mid AA)$, $A \longrightarrow aa^*$, $B \longrightarrow b^*$

(a) *Quel est le langage reconnu par cette grammaire ?*

Le langage reconnu est décrit par l'expression $(aa^*b \,|\, aa^*aa^*)$. On peut simplifier cette expression de différentes manières : $aa^*(b^*|aa^*)$, ou $a^+(b^*|a^+)$...

(b) *Peut-on proposer une grammaire algébrique « normale » qui reconnaisse ce langage ?*

La grammaire la plus simple : $A \rightarrow AB \mid AA$
$A \rightarrow aA \mid a$
$B \rightarrow bB \mid \varepsilon$

(c) *Est-ce qu'en général, on augmente le pouvoir expressif des grammaires algébriques en autorisant des expressions rationnelles en partie droite ? Justifiez brièvement votre réponse.*

Non, le fait d'autoriser des expressions rationnelles en partie droite n'ajoute pas de pouvoir expressif.

Idée de la démonstration : pour toute expression rationnelle, on peut définir une grammaire régulière qui la reconnaît. Donc on peut remplacer une règle de la forme $A \rightarrow \alpha$ où α est une expression rationnelle par la règle $A \rightarrow A'$, où A' est l'axiome d'une grammaire régulière reconnaissant le même langage que α.

5. *Soit la grammaire suivante :* $S \longrightarrow aSB \mid BA$
$A \longrightarrow Ac \mid \varepsilon$
$B \longrightarrow bAa$

(a) *Proposer une grammaire équivalente sans ε-productions.* Puisque A peut « s'effacer », pour enlever la règle $A \rightarrow \varepsilon$, il faut envisager dans toutes les règles le cas où A s'effacerait :

$S \longrightarrow aSB \mid BA \mid B$
$A \longrightarrow Ac \mid\!\!\not\varepsilon \mid c$
$B \longrightarrow bAa \mid ba$

(b) *Proposer une grammaire équivalente sans productions singulières.*

Il y a une seule production singulière directe ($S \rightarrow B$), et pas de productions singulières indirectes. Pour l'éliminer, on « saute » une étape de dérivation, et on remplace B par tout ce que donnerait B dans la règle $S \rightarrow B$.

$S \longrightarrow aSB \mid BA \mid\!\!\not B \mid ba \mid bAa$
$A \longrightarrow Ac \mid c$
$B \longrightarrow bAa \mid ba$

(c) *Proposer une grammaire équivalente sans récursivité gauche.*

Une seule règle récursive gauche directe, la règle $A \rightarrow Ac$. Pas de récursivité indirecte.

En appliquant l'algorithme à la lettre, on obtient à la place de $A \rightarrow Ac$:
$A \longrightarrow cA'$
$A' \longrightarrow cA' \mid \varepsilon$
Ce qui donne la grammaire (sans ε) :
$S \longrightarrow aSB \mid BA \mid ba \mid bAa$
$A \longrightarrow cA' \mid c$
$A' \longrightarrow cA' \mid\!\!\not\varepsilon \mid c$
$B \longrightarrow bAa \mid ba$

En observant que le non terminal A, source de la règle à dérécursiver, engendre exactement le langage c^+, on peut proposer directement une grammaire non récursive :
$S \longrightarrow aSB \mid BA \mid ba \mid bAa$
$A \longrightarrow cA \mid c$
$B \longrightarrow bAa \mid ba$

(d) *Proposer une grammaire équivalente en forme normale de Greibach.*

Ici, on peut appliquer l'algorithme, et ordonner les non terminaux. La seule contrainte est d'avoir $S < B$. On ne trouve comme règle à transformer que la règle $S \rightarrow BA$. On va la remplacer par $S \rightarrow bAaA \mid baA$. Cela donne, selon la grammaire d'origine :

$S \longrightarrow aSB \mid bAaA \mid baA \mid ba \mid bAa$
$A \longrightarrow cA' \mid c$
$A' \longrightarrow cA' \mid c$
$B \longrightarrow bAa \mid ba$

$S \longrightarrow aSB \mid bAaA \mid baA \mid ba \mid bAa$
$A \longrightarrow cA \mid c$
$B \longrightarrow bAa \mid ba$

Il reste à remplacer les terminaux en partie droite, ce qui donne, selon la grammaire d'origine :

$S \longrightarrow aSB \mid bAXA \mid bXA \mid bX \mid bAX$
$A \longrightarrow cA' \mid c$
$A' \longrightarrow cA' \mid c$
$B \longrightarrow bAX \mid bX$
$X \longrightarrow a$

$S \longrightarrow aSB \mid bAXA \mid bXA \mid bX \mid bAX$
$A \longrightarrow cA \mid c$
$B \longrightarrow bAX \mid bX$
$X \longrightarrow a$